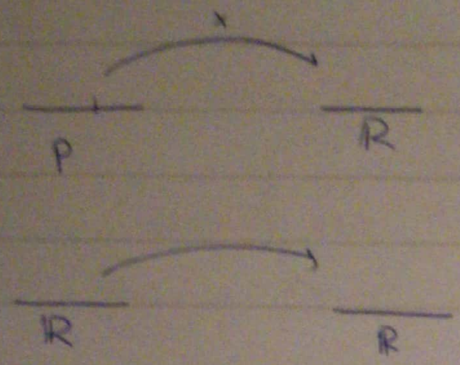
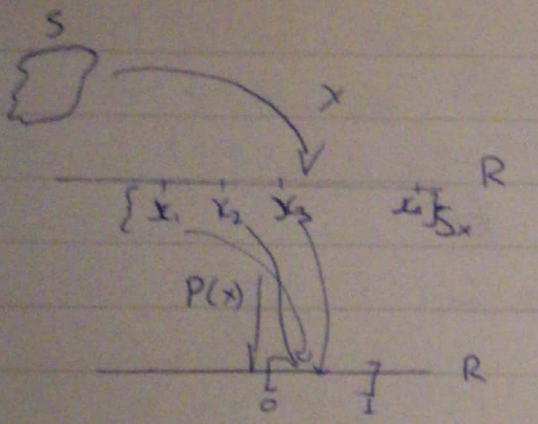
Διακριτή κ Συνεχής τ.μ.

Ορισμός: Μια τ.μ. λέγεται διακριτή αν το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο.



$$F_X(x) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$$



Σε κάθε τιμή μιας διακριτής τ.μ. αντιστοιχεί μια πιθανότητα ή
$P(X = x_i) \quad i = 1, 2, \dots n$

Συνάρτηση πιθανότητας: αντιστοιχίζει κάθε τιμή της διακριτής τ.μ. με την πιθανότητα πραγματοποίησής της.

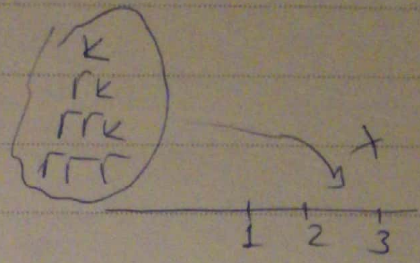
Ορισμός: Έστω X μια διακριτή τ.μ. με σύνολο τιμών $S_X = \{x_1, x_2, \dots x_n \dots\}$. Η συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. X συμβολίζεται $P_X : S_X \to \mathbb{R}$ και ορίζεται

$$P_X(x_i) = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots n$$

Παράδειγμα: Νόμισμα $\begin{cases} K \rightarrow 3/8 \\ \Gamma \rightarrow 5/8 \end{cases}$ ρίχνεται μέχρι να εμφανιστεί Κ ή τρία Γ. Ποια η σ.π. του αριθμού των απαιτούμενων ρίψεων. Ζητώ σ.π. της τ.μ. δηλ. P_X.

Τιμές της X → εξαρτώνται $x = 1, 2, 3$

$S = \{K, \Gamma K, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

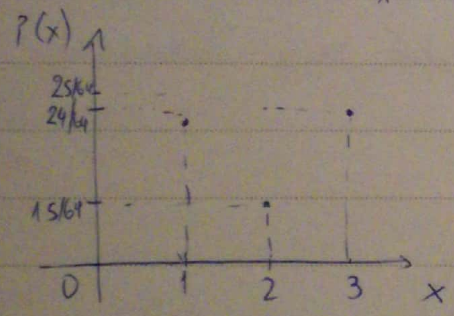


$P_X(1) = P(X=1) = P(K) = \frac{3}{8}$

$P_X(2) = P(X=2) = P(\Gamma K) = P(\Gamma)P(K) = \frac{15}{64}$

$P_X(3) = P(X=3) = P(\Gamma\Gamma K \text{ ή } \Gamma\Gamma\Gamma) = P(\Gamma\Gamma K) + P(\Gamma\Gamma\Gamma) = \frac{25}{64}$

Η σ.π. είναι $P_X(x) = \begin{cases} 3/8, & x=1 \\ 15/64, & x=2 \\ 25/64, & x=3 \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$



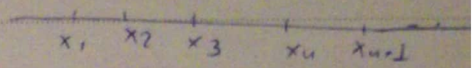
Πρόταση (Ιδιότητες): Έστω διακριτή τ.μ. X με σ.π. P_X

Τότε: (i) $P_X(x) \geq 0, \ \forall x$ — Συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται

(ii) $\sum_{x} P_X(x) = 1$ — ώστε μια συνάρτηση να είναι σ.π.

Σχέση μεταξύ α.σ.κ. και σ.π.

Έστω διακριτή τ.μ. X με τιμές $x_1, \dots x_n \dots$ και γνωστή σ.π. P_X.



$F(x) = P(X \leq x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

Αν $x < x_1$ τότε $F_X(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$

Αν $x_1 \leq x < x_2$ τότε $F_X(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X \leq x) = P(X = x_1) \overset{\text{ορ.}}{=} P_X(x_1)$

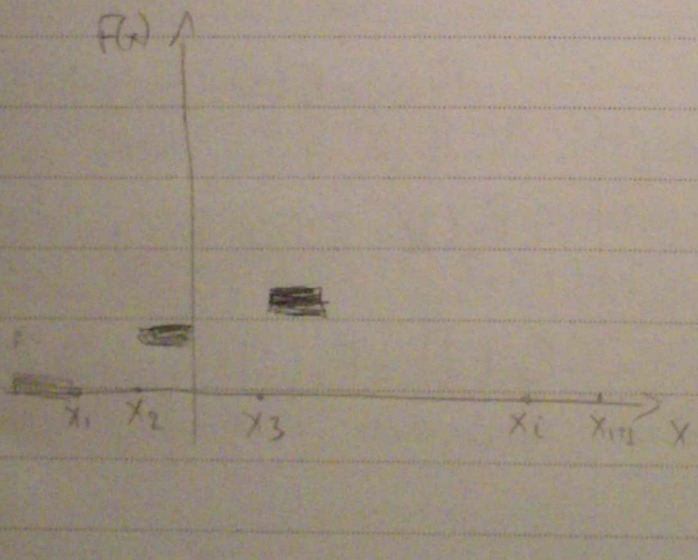
Αν $x_2 \leq x \leq x_3$ $F_X(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X \leq x) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$

$= P_X(x_1) + P_X(x_2)$

$\vdots$

Αν $x_i \leq x < x_{i+1}$ $F_X(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X \leq x) = P(X = x_1) + \dots + P(X = x_i)$

$= P_X(x_1) + \dots + P_X(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P_X(x_i)$



Έστω διακριτή τ.μ. X με τιμές $x_1, \dots, x_n, \dots$ και γνωστή α.σ.κ. $F(x)$. Μπορώ να βρω σ.π. $P_X(x)$;
Έστω x_i μια τιμή της τ.μ. X

$$P_X(x_i) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i -) \quad (*)$$
$$= F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

Παράδειγμα: Έστω διακριτή τ.μ. X με α.σ.κ.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & 0 \le x < 1 \\ 3/5, & 1 \le x < 2 \\ 4/5, & 2 \le x < 3 \\ 9/10, & 3 \le x < 7/2 \\ 1, & 7/2 \le x \end{cases}$$

Ζητώ την σ.π. P_X

Τιμές της X: $x = 0, 1, 2, 3, 7/2$

$P_X(0) = P(X=0) = F_X(0) - F_X(0-)$
$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$P_X(1) = F_X(1) - F_X(1-) = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$
$= \frac{1}{10}$

$P_X(2) = F_X(2) - F_X(2-) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

$P_X(3) = F_X(3) - F_X(3-) = \frac{9}{10} - \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$

$P_X\left(\frac{7}{2}\right) = F_X\left(\frac{7}{2}\right) - F_X\left(\frac{7}{2}-\right) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

Άρα
$$P_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x = 0 \\ 1/10, & x = 1 \\ 1/5, & x = 2 \\ 1/10, & x = 3 \\ 1/10, & x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Συνεχής τ.μ.

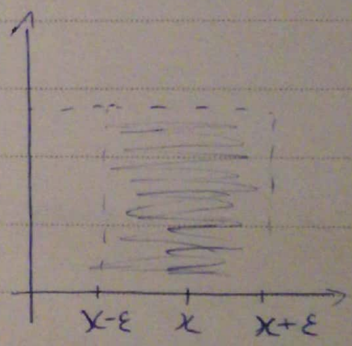
Πρώτη προσέγγιση ορισμού: Μια τ.μ. X λέγεται συνεχής αν το πλήθος των τιμών της είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο (π.χ. $\mathbb{R}$ ή διάστημα του $\mathbb{R}$)

▸ Έστω συνεχής τ.μ. X π.χ. βάρος νεογέννητου
τιμές X $\quad x \in [1,5kg, 7kg]$

Στη συνεχή περίπτωση έχει νόημα να αναφερθώ για πιθανότητα διαστήματος, οσοδήποτε μικρού γύρω από κάποια συγκεκριμένη τιμή.

Δηλ. $P(x=4kg) = \cancel{\frac{1}{\infty}} = 0$

$P(4kg-\varepsilon \leq X \leq 4kg+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$



Ορισμός: Έστω τ.μ. X. Η X λέγεται συνεχής αν υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση f_X ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$P(X\in B) = \int_B f_X(x)\,dx, \quad B \subseteq \mathbb{R}$$

Η f_X ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

Συνέπειες του ορισμού:

Συνέπεια 1η: Έστω $B=[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f_X(x)\,dx$$

Συνέπεια 2η: Έστω $B=(-\infty,x]$, $x\in\mathbb{R}$

$$\underset{\substack{\parallel \text{ορ.} \\ F_X(x)}}{P(-\infty<X\le x)}=\int_{-\infty}^x f_X(x)\,dx$$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}$$

F_X συνεχής παντού

Θ.Α.Λ.

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt=f_X(x)$$

$$=\frac{d}{dx}F_X(x)=f_X(x)$$

Συνέπεια 3η: Ισχύει $P(a\le X\le b)=\int_a^b f_X(x)\,dx$

Αν $a=b$: $P(X=a)=\int_a^a f_X(x)\,dx=0$

Συνέπεια 4η: Ισχύει $\lim_{x\to+\infty}F_X(x)=1$

Άρα $\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt=1$

Άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)=1$

Ιδιότητες της σ.π.π.: i) $f_X(x)\ge 0$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=1$

Συνέπεια 5η: Αν X συνεχής τ.μ. τότε η F_X είναι συνεχής παντού και έτσι $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$
$= F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

Παράδειγμα: Τ.μ. X σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} ce^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

α) $c = ;$, β) $F_X = ;$ γ) $P(1 < X < 2)$, $P(X \geq 2)$, $P(X < 1)$

α) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} ce^{-x}\,dx = -c\int_0^{\infty} de^{-x} = -c[e^{-x}]_0^{\infty} = -c[0-1] = c$

β) $F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x f_X(t)\,dt, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} =$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$= \begin{cases} \int_0^x e^{-t}\,dt, & x \geq 0 \\ 0, & \text{σε άλλη περίπτωση} \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

γ) $P(1 < X < 2) \rightarrow \int_1^2 f_X(x)\,dx = \int_1^2 e^{-x}\,dx = -(e^{-x}]_1^2 = e^{-1} - e^{-2}$

$F_X(2) - F_X(1)$
$= (1-e^{-2}) - (1-e^{-1})$
$= e^{-1} - e^{-2}$

$P(X \geq 2) \longrightarrow 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2)$